Camps complexos en l'electromagnetisme maxwellià. Rotacions duals i monopols magnètics

Josep Graells * **i Carme Martín Torres** †

Introducció

Una de les tasques bàsiques que els físics han d'afrontar és la de construir models matemàtics dels fenòmens físics. Sobre la base d'aquests models s'han d'explicar els fenòmens observats, suggerir nous experiments i preveure'n els resultats. Aquesta activitat ideal és complementada i ve suportada per la investigació limitada a l'anàlisi de les propietats dels models ja contruïts. Dins d'aquest context es poden plantejar qüestions tals com: són les equacions del model consistents? Són estables les solucions? Existeixen formulacions alternatives equivalents?, etc. La resposta a tals qüestions no té un lligam directe amb la potència predictiva del model, però tanmateix pot ser d'utilitat per precisar el domini d'aplicabilitat del model o bé per fer aflorar la necessitat de modificacions.

És dins d'aquest context acotat on cal localitzar aquest article, i en conseqüència l'anàlisi que es fa de les equacions de l'electromagnetisme maxwellià.

Les equacions de Maxwell referides a un referencial inercial i emprant el sistema d'unitats SI adopten per al buit la coneguda forma:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_e \qquad \vec{\nabla}c\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}c\vec{B} = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\wedge c\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\vec{j}_e$$

on $(\rho_e, \vec{j}_e)$ són les densitats de càrrega i corrent elèctric, $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ és la velocitat de la llum en el buit i $(\vec{E}, c\vec{B})$ és el camp electromagnètic. Atesa la manca d'adequació teòrica, que no pas pràctica, del sistema d'unitats SI, el camp magnètic l'hem multiplicat per c, ja que d'aquesta manera el camp electromagnètic es mesurarà en V/m.

Bé que les equacions de Maxwell automàticament inclouen l'equació de conservació de la càrrega elèctrica

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

la seva estructura i linealitat impedeixen que incloguin l'equació de moviment de les càrregues. A tal efecte hom complementa les equacions de Maxwell amb la força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\wedge c\vec{B})$$

que ens resol aquest problema i el de la definició operacional del mateix camp electromagnètic, usant una partícula carregada com a partícula de prova.

En els primers anys d'aquest segle, els físics anglesos Silberstein i Bateman varen formular les equacions de Maxwell en funció d'una magnitud vectorial complexa que equivalia a representar el camp electromagnètic mitjançant

$$\vec{\Psi} \equiv \vec{E} + ic\vec{B}$$

sent i la unitat imaginària, $i^2 = -1$.

Aquest enfocament no va ser seguit, atès que es va imposar la formulació estrictament vectorial de Gibbs, i posteriorment la tensorial-espinorial seguida de la geomètrica o intrínseca de les formes exteriors. Tanmateix va quedar algun remanent: per exemple, en l'estudi de les ones electromagnètiques planes alguns autors segueixen aquesta línia, bé que per la natura de les ones planes n'hi ha prou amb el pla complex C.

Aquest treball té per objectiu analitzar les propietats del camp electromagnètic en funció de $\vec{\Psi}$, sota una òptica actual, i aplicar-ho al cas dels monopols magnètics.

La representació de les equacions de Maxwell en funció de $\vec{\Psi}$. Propietats de transformació

En funció de $\vec{\Psi} = \vec{E} + ic\vec{B}$ les quatre equacions de Maxwell fàcilment se sintetitzen en les dues següents:

$$\vec{\nabla}\vec{\Psi} = \frac{1}{\varepsilon_0\rho_e}, \quad -i\vec{\nabla}\wedge\vec{\Psi} - \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\vec{j}_e \qquad (1)$$

La mateixa definició de $\vec{\Psi}$ ens indica que és un camp definit en l'espai-temps a valors en l'espai vectorial complex C^3. En tot l'article suposarem l'espai-temps pla.

El producte escalar euclidià indueix en C^3 dues prolongacions atesa la natura complexa de $\vec{\Psi}$:

$$\vec{\Psi}\,\vec{\Psi} = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 + i2c\vec{E}\vec{B}$$

$$\vec{\Psi}\vec{\Psi}^* = \vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2 = \frac{2}{\varepsilon_0}(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2)$$

****Josep Graells Casanellas** (Cervera, 1946) és doctor en Física per la Universitat de Barcelona (1978) i actualment treballa a FECSA en la direcció d'Explotació i Enginyeria

†**Carme Martín Torres** (Barcelona, 1950) és doctora en Física per la Universitat de Barcelona (1981) i és professora del col·legi "La Salle Gràcia"

Escollirem la primera opció, atès que és independent del referencial inercial que adoptem per representar $\vec{\Psi}$ en funció de $\vec{E}$ i $c\vec{B}$, és a dir, $\vec{\Psi}\,\vec{\Psi}$ és un invariant de Lorentz, constituït pels dos invariants del camp electromagnètic. En canvi, la segona opció conduiria a un producte escalar proporcional a la densitat d'energia del camp electromagnètic i, per tant, a la component (0,0) del seu tensor impuls-energia.

Per aprofundir en el coneixement fisico-matemàtic de $\vec{\Psi}$ s'ha d'analitzar com es comporta sota l'acció dels grups de simetria de les equacions de Maxwell, estudi que farem seguidament de manera resumida.

Grup de Lorentz

La representació del grup de Lorentz dins d'aquest context, això és, emprant com a espai vectorial de representació C^3, la formaran les matrius complexes 3×3 que deixen invariant el producte escalar $\vec{\Psi}\,\vec{\Psi}$. Si L és una transformació de Lorentz, s'ha de verificar la igualtat matricial:

$$(L\vec{\Psi})^T(L\vec{\Psi}) = \vec{\Psi}\,\vec{\Psi}$$

$$L^T L = I \tag{2}$$

Això és, les transformacions de Lorentz es representen mitjançant matrius complexes 3×3 ortogonals i de determinant unitat, i formen el que els matemàtics anomenen el grup SO(3,C).

El subgrup de les rotacions el constitueixen les familiars matrius reals ortogonals 3×3, és a dir, el grup O(3). En tractar-se de matrius reals, quan actuen sobre $\vec{\Psi}$ no barregen les components reals i imaginàries de $\vec{\Psi}$, això és, el camp elèctric es transforma sols en camp elèctric, i el camp magnètic es transforma sols en camp magnètic. Trivialment deixen el referencial inercial fix, i efectuen només una rotació dels eixos espacials.

En un canvi de referencial inercial de velocitat relativa $\vec{v} = v\vec{n}$, $\vec{n}\,\vec{n} = 1$, s'obté immediatament a partir de les conegudes lleis de transformació de $\vec{E}$ i $\vec{B}$, la llei de transformació per a $\vec{\Psi}$:

$$\vec{\Psi}' = \gamma\vec{\Psi} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\vec{\Psi}\vec{\beta} - i\gamma\vec{\beta}\wedge\vec{\Psi}$$

on $\vec{\beta} = \vec{n}v/c$.

Per tant la matriu L corresponent a un *boost* $\vec{\beta}$ és:

$$L_{ij} = \gamma(\delta_{ij} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\beta_i\beta_j + i\varepsilon_{ijk}\beta^k)$$

sent $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ i ε_{ijk} el pseudotensor tridimensional de Levi-Civita. Observem que per a aquestes transformacions (o *boosts*) els elements de L són complexos, per tant en actuar sobre $\vec{\Psi}$ barregen la part real de $\vec{\Psi}$, això és $\vec{E}$, amb la part imaginària $c\vec{B}$, fet que reflecteix la dependència en el referencial inercial escollit si es descriuen els fenòmens electromagnètics en funció del camp elèctric i el camp magnètic.

Transformacions discretes:
Paritat P, Inversió temporal T, Conjugació de càrrega C i Dualitat $(*)$

Atès que $\vec{E}$ és un vector polar ($P\vec{E} = -\vec{E}$ i $\vec{B}$ és un pseudovector ($Pc\vec{B} = c\vec{B}$)), $\vec{\Psi}$ es transforma sota la paritat com segueix:

$$P\vec{\Psi} = -\vec{\Psi}^*$$

Per inversió temporal, tenint en compte que $T\vec{E} = \vec{E}$ i $Tc\vec{B} = -c\vec{B}$, s'obté

$$T\vec{\Psi} = \vec{\Psi}^*$$

I per a la conjugació de càrrega a partir de $C\vec{E} = -\vec{E}$ i $Cc\vec{B} = -c\vec{B}$, s'obté

$$C\vec{\Psi} = -\vec{\Psi}$$

Per tant, $PCT\vec{\Psi} = \vec{\Psi}$.

Per a la dualitat tenint en compte que $(*)\vec{E} = -c\vec{B}$ i $(*)c\vec{B} = \vec{E}$, s'obté:

$$(*)\vec{\Psi} = i\vec{\Psi}$$

Per tant, l'operació de dualitat es redueix a multiplicar per la unitat imaginària i.

Per facilitar l'estudi d'algunes propietats del camp electromagnètic, es generalitza l'operació de dualitat $(*)$ definint les anomenades rotacions duals de complexió α, mitjançant

$$e^{*\alpha} = \cos\alpha + (*)\sin\alpha$$

Com que en el formalisme que estem aplicant acabem de demostrar que $(*) = i$, la representació de les rotacions duals ve donada pel grup *U(1)*:

$$e^{*\alpha}\vec{\Psi} = e^{i\alpha}\vec{\Psi} \tag{3}$$

Per què els monopols magnètics?

Les equacions de Maxwell (1) solament són invariants sota rotacions duals per als camps lliures, això és, si $\rho_e = 0$ i $\vec{j}_e = \vec{0}$. Quan hi ha presència de fonts les rotacions duals implicaran la seva complexificació:

$$\rho_e \Rightarrow e^{i\alpha}\rho_e = \cos\alpha\rho_e + i\sin\alpha\rho_e$$

$$\vec{j}_e \Rightarrow e^{i\alpha}\vec{j}_e = \cos\alpha\vec{j}_e + i\sin\alpha\vec{j}_e$$

La part imaginària de les fonts representa físicament càrregues i corrents magnètics. Per tant la covariància de les equacions de Maxwell sota rotacions duals implica l'aparició de càrregues magnètiques. Les càrregues magnètiques puntuals s'anomenen monopols magnètics.

Si suposem l'existència de càrregues magnètiques $(\rho_m, \vec{j}_m)$, les equacions de Maxwell esdevindran:

$$\vec{\nabla}\vec{\Psi} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_e + i\rho_m) \equiv \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$i\vec{\nabla}\wedge\vec{\Psi}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0 c}(\vec{j}_e+i\vec{j}_m)\equiv-\frac{1}{\varepsilon_0 c}\vec{j} \qquad (4)$$

Les rotacions duals, per tant, han conduït a unes equacions més simètriques, en les quals tant el camp $\vec{\Psi}$ com les fonts $(\rho,\vec{j})$ són magnituds complexes. Però la complexificació de les fonts, si aquestes són distribucions no puntuals de càrregues i corrents, implica necessàriament la complexificació dels potencials escalar i vectorial:

$$V=V_R+iV_I, \qquad c\vec{A}=c\vec{A}_R+ic\vec{A}_I \qquad (5)$$

Per expressar $\vec{\Psi}$ en funció de $(V,c\vec{A})$ sols cal recordar com estan relacionats $\vec{E}$ i $c\vec{B}$ en funció dels potencials:

$$\vec{\Psi}=\vec{E}+ic\vec{B}=-\vec{\nabla}V-\frac{1}{c}\frac{\partial c\vec{A}}{\partial t}+i\vec{\nabla}\wedge c\vec{A} \qquad (6)$$

Substituint (5) a (6) s'obté:

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}= & -\vec{\nabla}V_R-\frac{1}{c}\frac{\partial c\vec{A}_R}{\partial t}- \qquad (7)\\ & \vec{\nabla}\wedge c\vec{A}_I+i\left(-\vec{\nabla}V_I-\frac{1}{c}\frac{\partial c\vec{A}_I}{\partial t}+\vec{\nabla}\wedge c\vec{A}_R\right)\end{aligned}$$

Per tant, les càrregues magnètiques generen uns camps elèctrics que s'expressen segons $-\vec{\nabla}\wedge c\vec{A}_I$ i uns camps magnètics iguals a $-\vec{\nabla}V_I-\partial c\vec{A}_I/(c\partial t)$. Aquesta conclusió es podria inferir directament del cas amb fonts purament elèctriques aplicant-hi una rotació dual, que a la vegada conduiria a la necessitat de la complexificació dels potencials.

Pel que acabem d'exposar, si existissin distribucions contínues de càrregues i corrents magnètics, la descripció dels fenòmens electromagnètics a nivell dels potencials obligaria a duplicar l'estructura matemàtica:

$$(V,c\vec{A})=(V_R,c\vec{A}_R)+i(V_I,c\vec{A}_I)$$

Fet que també repercutiria en les corresponents transformacions de *gauge*: $\chi\to\chi_R+i\chi_I$

$$\begin{aligned}(V,c\vec{A}) \;\to\; & (V_R-\frac{\partial\chi_R}{\partial t},c(\vec{A}_R+\vec{\nabla}\chi_R))\\ + \; & i(V_I-\frac{\partial\chi_I}{\partial t},c(\vec{A}_I+\vec{\nabla}\chi_I))\end{aligned}$$

Per tant, l'estructura *U(1)* esdevindria *U(1)*$\times$ *U(1)*. Evidentment $\vec{\Psi}$ és invariant sota les transformacions de *gauge* i en conseqüència no hi aflora explícitament la duplicitat estructural.

En aquest estadi és quan entra en joc P.A.M. Dirac. Dirac el 1931 es va plantejar el que els físics anglosaxons qualificarien de pregunta del milió de dòlars:

> "És possible modificar la teoria electromagnètica en una forma tal que pugui tenir en compte els monopols magnètics (càrregues magnètiques *puntuals*) sent el potencial vector (real) el camp fonamental a partir del qual es construeixen els camps elèctric i magnètic?"

És a dir, i dins del context d'aquest article, és possible descriure càrregues magnètiques puntuals sense que calgui complexificar els potencials? La resposta que va trobar Dirac és afirmativa, però, com raonaria un pagès de secà, si forcem la teoria en una direcció, caldrà per força afluixar-la en una altra direcció. La qüestió és, doncs, per quina direcció és més adient afluixar-la? Dirac, com és lògic, també va reeixir en l'elecció de la direcció més adient per relaxar la teoria estàndard.

En l'apartat que segueix intentarem resumir el punt de vista de Dirac i algunes conseqüències extraordinàries que se'n deriven si pressuposem l'existència dels monopols magnètics.

Monopols magnètics segons Dirac

L'exemple més senzill que hom es pot plantejar és el d'un monopol estàtic g. Per fixar les idees el suposarem localitzat a l'origen del referencial inercial propi del monopol. Tenint en compte que la font en aquest cas és $\rho(\vec{r})=\rho_e+i\rho_m=ig\delta(\vec{r})$, les equacions de Maxwell (4) es redueixen a les següents:

$$\vec{\nabla}\vec{\Psi}=i\frac{g}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}), \qquad i\vec{\nabla}\wedge\vec{\Psi}=\vec{0} \qquad (8)$$

La solució de eq:monopol és:

$$\vec{\Psi}=i\frac{g}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

En conseqüència:

$$\vec{E}=\vec{0} \qquad \vec{B}=-\vec{\nabla}\frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\equiv-\vec{\nabla}V_I \qquad (9)$$

Com s'ha anticipat al final de l'apartat anterior, el problema que es va plantejar Dirac va ser el de representar $\vec{B}$ d'una manera *tan propera com fos possible* a $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$, i no seguir la via V_I apuntada a eq:campmonopol, que conduiria a duplicar les estructures matemàtiques en copiar la metodologia electrostàtica. Ara bé, com que *div* (*rot*) $\equiv 0$, trivialment $\vec{B}$ no es pot representar completament mitjançant el $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$, atès que (8) no es verificaria. Per tant, Dirac es va veure obligat a relaxar el formulisme per tal de salvar $\vec{A}$. Li interessava preservar $\vec{A}$, com a magnitud bàsica, entre altres motius perquè $\vec{A}$ és el camp que descriu els fenòmens electromagnètics a nivell quàntic.

El model físic que permet preservar $\vec{A}$ consisteix a identificar el monopol amb un pol d'un imant filiforme semiinfinit o, el que és equivalent, amb un solenoide (filiforme) semiinfinit. El camp creat pel solenoide, fora d'ell, coincidirà amb el camp creat pel monopol. Per tant, l'únic que caldrà fer per tal d'obtenir el camp del monopol a tot l'espai serà restar del camp del solenoide el camp singular (de domini filiforme) de l'interior del solenoide. Des del punt de vista matemàtic, $\vec{A}$ esdevé singular (discontinu) al llarg d'una corda (corda de Dirac) que va des del monopol fins a l'infinit.

Per concretar matemàticament el que s'ha exposat, representarem el camp magnètic del monopol (8) explicitant la seva vertadera natura de tensor antisimètric 3×3. Sigui $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi\}$ la base ortonormalitzada associada al sistema de coordenades esfèriques, llavors:

representació vectorial $\qquad$ representació tensorial

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\hat{u}_r}{r^2} \quad \rightarrow \quad \overline{\overline{B}} = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{r^2}\hat{u}_\theta \wedge \hat{u}_\varphi$$

sent $\wedge$ el producte exterior $\hat{u}_i \wedge \hat{u}_j = \hat{u}_i\hat{u}_j - \hat{u}_j\hat{u}_i$.

Seguidament passarem a l'espai dual. Per fer-ho, considerem $\{\omega^{\hat{r}}, \omega^{\hat{\theta}}, \omega^{\hat{\varphi}}\} = \{dr, rd\theta, r\sin\theta d\varphi\}$ la base dual o recíproca de $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi\}$, això és $\omega^{\hat{r}}\,\hat{u}_j = \delta^i_j$. Per tant, la 2-forma camp magnètic és:

$$\underline{\underline{B}} = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{r^2}\omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\varphi}} = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\theta d\theta \wedge d\varphi$$

Tenint en compte les propietats de la diferenciació exterior, en particular $d^2 \equiv dd = 0$, equivalent a $rot\,(grad) = 0$ i $div\,(rot) = 0$, s'obté:

$$\underline{\underline{B}} = d(-\frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\cos\theta d\varphi + d\chi) \equiv dA \qquad (10)$$

on ja s'ha afegit la diferencial d'una funció arbitrària χ, per així tenir en compte de bell antuvi les transformacions de *gauge*.

De (10) s'infereix immediatament les dues 1-formes potencial que s'empren habitualment:

1. La de Dirac, definida escollint $\chi = \varphi$

$$\underline{A}^D = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}(1-\cos\theta)d\varphi = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\omega^{\hat{\varphi}}$$

2. La de Schwinger, definida escollint $\chi = 0$

$$\underline{A}^S = -\frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\cos\theta d\varphi = -\frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\omega^{\hat{\varphi}}$$

Trivialment els corresponents potencials vectors són:

$$\vec{A}^D = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}u_{\hat{\varphi}}, \quad \vec{A}^S = -\frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_{\hat{\varphi}} \qquad (11)$$

Els lectors que no posseeixin uns coneixements elementals de l'eina de les diferencials exteriors, poden deduir directament $\vec{A}^D$ recorrent al model físic del solenoide filiforme, suposant-lo localitzat en el semieix de les z negatives:

$$\vec{A}^D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_{-\infty}^{0}\frac{d\vec{m} \wedge (\vec{r}-\vec{r'})}{c|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

sent $d\vec{m}$ la diferencial del moment dipolar magnètic de la distribució contínua d'espires del solenoide. La unitat de càrrega magnètica escollida obliga a definir $d\vec{m} = cgdz\hat{k}$. La integració s'efectua sense dificultat emprant coordenades cilíndriques.

Observem que $\vec{A}^D$ és singular al llarg del semieix de les z negatives, $\theta = \pi$, i, per tant, queda palès que no pot existir *un potencial vector global que generi el camp del monopol*, fet evident a partir del model físic que s'ha esmentat abans.

Per tant, $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^D$ en tot l'espai excepte en el semieix de les z negatives, anomenat, com ja s'ha dit anteriorment, corda de Dirac. Realment la forma i posició de la corda no és rellevant, ja que mitjançant una transformació de *gauge* adient pot ser desplaçada com es desitgi, amb l'única restricció que neixi en el monopol i acabi en l'infinit.

Com que el flux de $\vec{B}$ a través de qualsevol superfície tancada que contingui g és $g/(\varepsilon_0 c)$, s'infereix que perquè la solució de Dirac sigui vàlida en tot l'espai cal expressar-la:

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\hat{u}_r}{r^2} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^D - \frac{g}{\varepsilon_0 c}\theta(-z)\delta(x)\delta(y)\hat{k} \qquad (12)$$

sent $\theta(-z)$ la funció salt unitat de Heaviside. Recordant que $d\theta(-z)/dz \equiv -\delta(z)$, el càlcul de $\vec{\nabla}\vec{B}$ esdevé $g\delta(\vec{r})/\varepsilon_0 c$, a causa de la *corda de flux* que s'ha restat al llarg del semieix de les z negatives.

La descripció que s'acaba de fer del camp d'un monopol magnètic és singular, atès que inevitablement el potencial vector que s'ha d'emprar ho ha de ser. Ara bé, es pot *relaxar* el formalisme en una direcció diferent a la seguida per Dirac. Aquesta direcció alternativa va ser trobada per Wu i Yang l'any 1975, quan varen aplicar en aquest domini els conceptes dels espais fibrats. Seguidament farem un resum elemental de les idees de Wu i Yang.

Monopols segons Wu i Yang

Suposarem com fins ara que el monopol g està situat a l'origen de coordenades $\vec{r} = \vec{0}$ i es construirà el camp $\vec{B}$ mitjançant el procediment següent (vegeu la figura):

Es cobrirà l'esfera de radi r centrada a l'origen amb dues regions que se superposin parcialment, per exemple, mitjançant dues regions hemiesfèriques que se superposin a l'equador.

Anomenarem regió I la que inclou el pol nord i regió II la que inclou el pol sud. En la regió I escollirem un potencial vector $\vec{A}_I$ amb la singularitat o corda de Dirac que s'estengui des del monopol fins a l'infinit travessant el pol sud. En conseqüència $\vec{A}_I$ no és singular, això és, és continu en la totalitat de la regió I. D'una manera semblant es definirà el potencial $\vec{A}_{II}$ amb la línia singular començant a l'origen i travessant l'esfera pel pol nord, de manera que $\vec{A}_{II}$ no és singular en la regió II. Així, en cadascuna de les regions podem escriure:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_I \quad \text{en la regió I} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_{II} \quad \text{en la regió II}$$

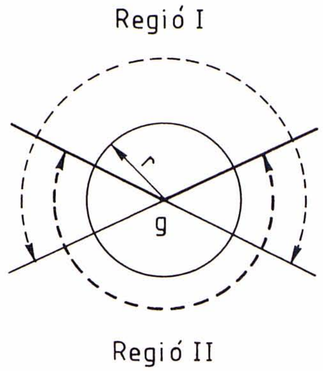

Figura 1: *Monopol segons Wu i Yang*

sent

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\hat{u}_r,$$

$$\vec{A}_I = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\hat{u}_\varphi \text{ i } \vec{A}_{II} = \frac{g}{4\pi\varepsilon_0 cr}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\hat{u}_\varphi$$

ja que la singularitat de $\vec{A}_{II}$ està rodada un àngle $\theta = \pi$ respecte a la de $\vec{A}_I$. Evidentment en l'equador $\vec{A}_I$ i $\vec{A}_{II}$ han d'estar relacionats per una transformació de *gauge*:

$$\vec{A}_I = \vec{A}_{II} + \vec{\nabla}\chi \tag{13}$$

Restant $\vec{A}_I$ de $\vec{A}_{II}$ immediatament es dedueix que

$$\chi = \frac{2g}{4\pi\varepsilon_0 c}\varphi \tag{14}$$

El flux total que surt de l'esfera es pot calcular en funció de χ, ja que aplicant el teorema de Stokes resulta:

$$\begin{aligned}\Phi_g &= \int_I \vec{\nabla}\wedge\vec{A}_I d\vec{S}_I + \int_{II}\vec{\nabla}\wedge\vec{A}_{II}d\vec{S}_{II} = \\ &= \oint_{equador}\vec{A}_I d\vec{r} - \oint_{equador}\vec{A}_{II}d\vec{r} = \\ &= \oint_{equador}\vec{\nabla}\chi d\vec{r} = \frac{2g}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{g}{\varepsilon_0 c}\end{aligned}$$

Condició de quantització de Dirac

Una de les conseqüències més sorprenents que resultaria de l'existència de monopols magnètics és la quantització de la càrrega elèctrica. Per poder deduir-la hem de fer una petita excursió al món de la quàntica. Considerem una partícula de càrrega elèctrica q sotmesa al camp del monopol g. Suposarem que la partícula q es pot descriure mitjançant l'equació de Schrödinger-Pauli, atès que no permetrem que assoleixi velocitats relativistes.

Si continuem fent ús del formalisme de Wu i Yang, caldrà representar el *ket* de la partícula q en les regions hemiesfèriques I i II d'abans:

$$|\alpha_I;t\rangle \quad \text{en la regió I} \quad |\alpha_{II};t\rangle \quad \text{en la regió II}$$

En tota la regió I es verifica:

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A}_I)^2|\alpha_I,t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha_I;t\rangle \tag{15}$$

Si en la zona de superposició d'ambdues regions apliquem la transformació de *gauge* (13), a fi d'expressar $\vec{A}_I$ en funció de $\vec{A}_{II}$, l'equació (15) ha de conduir a la següent:

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A}_{II})^2|\alpha_{II};t\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha_{II};t\rangle \tag{16}$$

cosa que implica que els *kets*, en efectuar una transformació de *gauge* χ, estiguin relacionats com segueix:

$$|\alpha_I;t\rangle = e^{iq\chi/\hbar}|\alpha_{II};t\rangle \tag{17}$$

L'equació (17) sols té sentit si l'exponencial és uniavaluada al voltant de l'equador, per la qual cosa, i tenint en compte (14) es dedueix:

$$\frac{q}{\hbar}(\chi(2\pi) - \chi(0)) = \frac{q}{\hbar}\frac{2g}{4\pi\varepsilon_0 c}2\pi = 2\pi n$$

això és:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qg}{\hbar c} = \frac{n}{2} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots \tag{18}$$

L'equació (18) és la cèlebre condició de quantització de Dirac. Condició que ha de ser satisfeta per qualsevol parella de càrregues elèctrica i magnètica. Implica que ambdues càrregues sempre han de manifestar-se com a múltiples d'una unitat fonamental. De fet, en la natura la càrrega elèctrica sempre es manifesta com a múltiple d'una unitat fonamental (la càrrega d'un quark o 1/3 de la càrrega d'un electró). Quan Dirac va deduir la teoria dels monopols no existia cap altra explicació de la quantització de la càrrega elèctrica.

Atès que la condició de quantització de Dirac és tan rellevant, resumirem un mètode menys formal que el de Wu i Yang per deduir-la. Els ingredients d'aquest mètode són la corda de Dirac i l'efecte Bohm-Ahranov.

El fet que la corda de flux de Dirac sigui inobservable clàssicament no garanteix que també ho sigui quànticament. Sols cal recordar l'efecte Bohm-Ahranov, en el qual les partícules carregades experimenten fenòmens de dispersió en regions on hi ha tubs de flux (regions en les quals $\vec{B} = 0$ però $\vec{A} \neq 0$). Ara bé, si el flux pren determinats valors, llavors no hi ha dispersió i la corda de Dirac també serà inobservable a nivell quàntic. Considerem una superfície oberta qualsevol, el contorn de la qual la formen dues possibles trajectòries que pot seguir la càrrega q. Si la corda de Dirac travessa la superfície, la diferència de fase, ΔS, corresponent als *kets* associats a cada trajectòria, és:

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = \frac{q}{\hbar}\int_S \vec{B}_{corda}\cdot d\vec{S} = \frac{gq}{\varepsilon_0 c\hbar}$$

Llavors, la càrrega q no serà dispersada per la corda de flux si es verifica:

$$\frac{gq}{\varepsilon_0 c\hbar} = 2\pi n$$

En tot aquest apartat s'ha fet ús de $\vec{A}^D$, és a dir, del model físic de Dirac. Es proposa al lector interessat que refaci l'anàlisi mitjançant la solució $\vec{A}^S$ de Schwinger (singularitat que va de $+\infty$ a $-\infty$, passant pel monopol). Possiblement quedarà sorprès en constatar que els resultats a nivell quàntic no coincideixen, atès que físicament no són totalment equivalents.

Força de Lorentz. Magnituds físiques associades al camp

Les hipotètiques partícules de massa m que posseeixen tant càrrega elèctrica q com càrrega magnètica g, això és $Q = q + ig$, s'anomenen *dyons*. Quan estan sotmeses a l'acció d'un camp electromagnètic $\vec{\Psi} = \vec{E} + ic\vec{B}$, la força que $\vec{\Psi}$ transmet als dyons és:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times c\vec{B}) + g(c\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E})$$

En funció de $\vec{\Psi}$ i de Q s'obté:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \Re(Q^*(\vec{\Psi} - i\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{\Psi})) \tag{19}$$

on $\Re$ representa la part real.

Expressions que s'infereixen en aplicar un *boost* de Lorentz a la força que actua en el referencial inercial instantani propi del dyon:

$$\vec{F'} = q\vec{E'} + gc\vec{B'} = \Re(Q^*\vec{\Psi})$$

A partir de les equacions de Maxwell (4), i seguint la metodologia estàndard que es pot trobar en qualsevol text d'electromagnetisme de nivell mitjà, les expressions de les densitats d'energia, moment lineal i moment angular que s'han d'associar al camp electromagnètic $\vec{\Psi}$ per preservar els teoremes de conservació corresponents són:

- densitat d'energia

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi}^*$$

- flux d'energia (vector de Poynting)

$$\vec{N} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 ci\vec{\Psi} \times \vec{\Psi}^*$$

- densitat de moment lineal

$$\vec{g} = \frac{\vec{N}}{c^2}$$

- densitat de moment angular

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{g}$$

- tensor de tensions de Maxwell

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\Psi_\alpha \Psi_\beta^* + \Psi_\alpha^* \Psi_\beta - \delta_{\alpha\beta}\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi}^*\right]$$

Per posar un exemple senzill, considerem un sistema constituït per dues partícules, un monopol de càrrega $Q = ig$ i una càrrega elèctrica $Q = q$. Encara que es tracta d'un sistema molt senzill, els resultats que se'n deriven són prou interessants i, el que és més important, són generadors de qüestions.

Si suposem que g i q, en un determinat instant, estan en repòs respecte a un referencial inercial, llavors romandran en repòs per sempre. Aquesta asseveració es dedueix fàcilment a partir de la força de Lorentz (19). Ara bé, es tracta d'un equilibri estable? Per fixar les idees suposarem que l'origen del sistema de coordenades el situem en el monopol g, i que la càrrega elèctrica q i el monopol determinen l'eix z. Per tant, les posicions del monopol i la càrrega vindran definides pels vectors $\vec{r} = \vec{0}$ i $\vec{r} = a\hat{k} = \vec{a}$ respectivament. Els camps que ambdues càrregues creen són:

$$\vec{\Psi}_g = ic\vec{B} = i\frac{g}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{\Psi}_q = \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}$$

i el camp total $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_g + \vec{\Psi}_q$.

La força que actua sobre la càrrega deguda al monopol g és $\vec{F} = \Re(Q^*\vec{\Psi}_g) = \Re(qic\vec{B}) = \vec{0}$. I la que actua sobre el monopol deguda a la càrrega q és $\vec{F} = \Re(Q^*\vec{\Psi}_q) = \Re(-ig\vec{E}) = \vec{0}$.

Seguidament analitzarem el flux d'energia i, per tant, la densitat de moment lineal corresponent a aquest sistema estàtic:

$$\vec{N} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 ci\vec{\Psi} \times \vec{\Psi}^* = \varepsilon_0 c\frac{qg}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{N}}{c^2} = \varepsilon_0\frac{qg}{(4\pi\varepsilon_0)^2 c}\frac{\vec{r} - \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Magnituds que si s'expressen en funció de les coordenades esfèriques, associades al sistema de coordenades definit abans, donen lloc a:

$$\vec{g} = -\frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{a}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2|\vec{r} - \vec{d}|^3}\hat{u}_\varphi(\theta, \varphi)$$

Hi ha, per tant, un flux de moment lineal estacionari al voltant de l'eix z, això és, de la recta que uneix el monopol g i la càrrega elèctrica q. Aquesta densitat de moment lineal indueix la densitat de moment angular següent:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{g} = +\frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{a}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r|\vec{r} - \vec{d}|^3}\hat{u}_\theta(\theta, \varphi)$$

En conseqüència, el camp electromagnètic creat per la parella g i q en repòs transporta un moment angular total

$$\vec{L} = \int \vec{l} \quad d^3r \tag{20}$$

El càlcul de $\vec{L}$ es pot efectuar de diverses maneres; per exemple, si se segueix la metodologia directa apuntada per les expressions deduïdes anteriorment, cal expressar el vector unitari $\hat{u}_\theta(\theta, \varphi)$ en funció dels vectors unitaris de les coordenades cartesianes, $\hat{u}_\theta \hat{\imath} \cos\varphi \cos\theta + \hat{\jmath} \sin\varphi \cos\theta - \hat{k} \sin\theta$. Llavors, la integració a tot l'espai (20) elimina automàticament les components $\hat{\imath}$ i $\hat{\jmath}$, ja que la dependència en φ sols és a través del $\cos\varphi$ i del $\sin\varphi$ respectivament. El càlcul de la component $\hat{k}$ restant s'efectua immediatament, sent el moment angular total del camp electromagnètic com segueix:

$$\vec{L} = -\hat{k}\frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c} \tag{21}$$

Per tant, el camp electromagnètic transporta un moment angular finit al llarg de l'eix z, i és independent de la separació a entre les dues partícules. En aquest estadi ja s'albira que sota un punt de vista quàntic la càrrega magnètica g i la càrrega elèctrica q no són mútuament independents. De fet, raonant de forma heurística, el moment angular al llarg de l'eix z hauria de quantitzar-se segons $\frac{n}{2}\hbar$, on n és un nombre enter. (No és convenient excloure a priori la possibilitat de spin semienter, ja que el moment angular transportat pel camp no és un moment angular orbital típic). Per tant, (21) condueix altre cop a la regla de quantització de Dirac:

$$\frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c} = \frac{n}{2}\hbar$$

Cal observar que totes les magnituds físiques associades a $\vec{\Psi}$, com les densitats d'energia, el moment lineal, el moment angular i el tensor tensions de Maxwell són invariants sota rotacions duals, ja que $\vec{\Psi}$ apareix sempre en combinacions lineals de productes (escalar, vectorial, tensorial) del tipus $\vec{\Psi}\vec{\Psi}^*$. Per tant, en ser (21) invariant sota rotacions duals, també serà aplicable als dyons, i resulta per a $Q_1 = q_1 + ig_1$ i $Q_2 = q_2 + ig_2$ el següent moment angular total:

$$\vec{L} = \hat{k}\frac{g_1 g_2 - g_2 g_1}{4\pi\varepsilon_0 c}$$

sent $\hat{k}$ el vector unitari dirigit del primer al segon dyon.

Per completar l'estudi del moment angular sota un punt de vista clàssic, analitzarem el moviment d'una càrrega de prova q sotmesa al camp magnètic d'un monopol g, que suposarem situat sempre a l'origen de coordenades. A més a més, sols es farà ús de l'aproximació newtoniana, a fi que el lector interessat, aplicant l'equació de Schrödinger, pugui completar-ho amb l'estudi quàntic.

La dinàmica de la càrrega q, en l'aproximació no relativista que volem emprar, està regida per l'equació de moviment de Newton:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q\frac{\vec{v}}{c} \times c\vec{B} = \frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{22}$$

Per analitzar les conseqüències que es deriven de l'equació del moviment (22) s'aplicarà la metodologia estàndard de resolució d'un típic problema de mecànica.

a) Constants del moviment:

Atesa l'estructura del segon membre de (22) es verifica

$$\vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) = 0$$

Per tant

$$\vec{v}^2 = \text{constant}, \quad \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \text{constant}$$

L'energia cinètica s'ha de conservar atès que el camp magnètic no efectua treball sobre la càrrega q.

b) A partir de la igualtat següent

$$\frac{d^2}{dt^2}(r^2) = \frac{d}{dt}(2\vec{r} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v}^2 + 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

i tenint en compte els resultats de a), s'obté:

$$\vec{r}^2(t) = \vec{v}^2 t^2 + C_1 t + C_2$$

sent C_1 i C_2 constants d'integració. Si es fixa l'escala de temps de forma tal que a $t = 0$, la càrrega q estigui en la posició més propera al monopol, és a dir

$$r(0) = d \qquad \text{(distància de màxim atansament)},$$

llavors, $r^2(t)$ es redueix a

$$r^2(t) = \vec{v}^2 t^2 + d^2 \tag{23}$$

Equació de la qual s'infereixen conseqüències rellevants. Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, la càrrega q ve de l'infinit i retorna a l'infinit, per tant *no hi ha estats lligats*. El cas $\vec{v} = \vec{0}$, estudiat al començament d'aquest apartat, és una situació molt especial, de fet és *inestable*: una pertorbació, per petita que sigui, induirà en la càrrega q un moviment que la farà arribar a l'infinit. En conseqüència, el cas $\vec{v} = \vec{0}$ és irrellevant quan s'investiga la dispersió de partícules carregades per monopols.

c) Finalment considerem el moment angular orbital de la càrrega $q : \vec{l}_q = \vec{r} \times m\vec{v}$. El càlcul de la derivada temporal evidència que $\vec{l}_q$ no és una constant del moviment, en efecte:

$$\frac{d\vec{l}_q}{dt} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\vec{r} \times (\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) \neq \vec{0}$$

Sigui $\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ el vector unitari que en cada instant està dirigit del monopol a la càrrega q. Un càlcul directe dóna:

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}$$

Per tant,

$$\frac{d\vec{l}_q}{dt} = \frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{d\hat{u}_r}{dt} \equiv -\frac{d}{dt}(-\frac{qg}{4\pi\varepsilon_0 c}\hat{u}_r)$$

En substituir el moment angular total del camp electromagnètic, equació (21), s'obté:

$$\frac{d}{dt}(\vec{l}_q + \vec{L}) \equiv \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{0}$$

Per tant, la magnitud que es conserva és el moment angular total:

$$\vec{J} = \vec{l}_q + \vec{L} = \text{constant}$$

No obstant això, atès que $\vec{L} \cdot \vec{l}_q = 0$ també es verifica

$$\vec{J}^2 = \vec{l}_q^2 + \vec{L}^2$$

En conseqüència s'ha de complir $\vec{l}_q^2 = \text{constant}$, malgrat que $\vec{l}_q$ no ho és.

Multiplicant escalarment per $\hat{u}_r$ l'equació (23), s'infereix:

$$\vec{J} \cdot \hat{u}_r = L = \text{constant}$$

això és

$$\cos(\vec{J}, \hat{u}_r) = \frac{L}{J} = \text{constant}$$

L'angle entre $\vec{J}$ i $\vec{r}$ és constant i, per tant, el moviment de la càrrega q està restringit a la superfície d'un con d'eix $\vec{J}$.

El problema simètric del que s'acaba d'analitzar, és a dir, el moviment d'un monopol g sotmès a l'acció d'una càrrega elèctrica q en repòs a l'origen de coordenades, està regit per l'equació:

$$\vec{F} = g\vec{v} \times \vec{E} \tag{24}$$

l'estudi de la qual pot suggerir el disseny de dispositius de detecció de monopols. Substituint a (24) el camp elèctric coulombià es retroba l'equació (22), en la qual la m del primer membre és ara la massa del monopol. Les teories de gran unificació (GUT) suggereixen que en els primers instants de la creació de l'univers es varen formar amb profusió monopols massius, d'una massa d'ordre de magnitud 10^{16} GeV, i càrrega magnètica d'acord amb la condició de quantització de Dirac. La qüestió del nombre actual de monopols és més incerta, ja que les diverses teories proporcionen resultats divergents. No obstant això, en el cas que actualment existissin els monopols, hi ha bastant acord entre els físics sobre el fet que els monopols residuals s'han de moure a velocitats petites comparades amb la de la llum, i en conseqüència han d'interactuar dèbilment amb la matèria.

El 1983, Cabrera va manifestar que havia detectat un monopol. L'afirmació de Cabrera va provocar una gran activitat tant teòrica com experimental, el resultat de la qual fou el qüestionament per la majoria dels físics de l'asseveració de Cabrera. Els arguments experimentals es basen en el *límit de Parker*, que estima un flux màxim de monopols magnètics de l'ordre de $10^{-11}\text{m}^{-2}\text{sr}^{-1}\text{s}^{-1}$. Si s'introdueix la superfície del detector de Cabrera en aquest límit es dedueix que per poder detectar un sol monopol s'hauria d'esperar 10^6 anys, cosa que implica una probabilitat baixíssima.

A partir de 1982 s'han dissenyat i estan en funcionament detectors més sensibles i perfeccionats, el funcionament dels quals no ha implicat que es pugui afirmar que actualment existeixin monopols, però tampoc que no existeixin. Es tracta, per tant, d'un tema que resta obert.

Acabem aquest apartat citant dues frases de P.A.M. Dirac, la primera de les quals data de 1931:

> "*This new development (the monopol hypothesis) requires no change whatever in the formalism (of quantum mechanics) when expressed in terms of abstract symbols denoting states and observables, but is merely a generalization of possibilities of representation of these abstract symbols by wave functions and matrices.* Under these circumstances one would be surprised if Nature had made no use of it."

La segona, de l'hivern de 1983 (un any abans del seu traspàs), pot considerar-se un repte per als experimentadors:

> "*I am inclined now to believe that monopols do not exist. So many years have gone by without any encouragement from the experimental side.*"

Referències

STRATON, J.A., *Electromagnetic Theory*, Mc Graw-Hill, (1941).
PASCUAL, P., TARRACH, R., *Monopolos*, Investigación y Ciéncia, (setembre 1978).
FELSAGER, B., *Geometry, Particles and Fields*, Odense University Press, (1981).
CABRERA, A., *Phys. Rev. Lett. 48*, 1378 (1982).